I тур I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики
категорія Т (РТФ) 2019
перший курс

1. Для матриць $A_{3\times 2}$ та $B_{2\times 3}$ знайти $\det(AB)$.

2. Про число z відомо, що
$$z + \frac{1}{z} = 1.$$
Знайти
$$z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}.$$

3. Довести, що відрізок дотичної до гіперболи, який знаходиться між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

4. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{[-\pi,\pi]} f(x) \le \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що
$$\left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \le 1$$
для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2018}, a_{2019})$ сформуємо новий набір за правилом
$$\mathbf{a}' = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2018} + a_{2019}}{2}, \frac{a_{2019} + a_1}{2}\right).$$
Визначити всі набори $\mathbf{a}$, для яких всі елементи всіх наборів
$$\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''', \ldots$$
є цілими числами.

I тур I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики
категорія Т (РТФ) 2019
перший курс

1. Для матриць $A_{3\times 2}$ та $B_{2\times 3}$ знайти $\det(AB)$.

2. Про число z відомо, що
$$z + \frac{1}{z} = 1.$$
Знайти
$$z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}.$$

3. Довести, що відрізок дотичної до гіперболи, який знаходиться між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

4. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{[-\pi,\pi]} f(x) \le \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що
$$\left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \le 1$$
для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2018}, a_{2019})$ сформуємо новий набір за правилом
$$\mathbf{a}' = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2018} + a_{2019}}{2}, \frac{a_{2019} + a_1}{2}\right).$$
Визначити всі набори $\mathbf{a}$, для яких всі елементи всіх наборів
$$\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''', \ldots$$
є цілими числами.

I тур I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики
категорія Т (РТФ) 2019
старші курси

1. Про число z відомо, що $z + \frac{1}{z} = 1$. Знайти
$$z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}.$$

2. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{[-\pi,\pi]} f(x) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

3. Обчислити
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{2}{3} + x + y}{1 + x + y + z} dxdydz.$$

4. За допомогою розкладу функції $f(x) = x, \quad x \in (0, 2\pi)$, в ряд Фур'є показати, що
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$
Використавши отриману рівність довести, що нескінченна сума
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots, \quad x \in (0, \pi),$$
не залежить від x.

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:
$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$
Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу
$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2019} a_i a_j,$$
де $a_1, \ldots, a_{2019} \in [-1, 1]$.

I тур I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики
категорія Т (РТФ) 2019
старші курси

1. Про число z відомо, що $z + \frac{1}{z} = 1$. Знайти
$$z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}.$$

2. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{[-\pi,\pi]} f(x) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

3. Обчислити
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{2}{3} + x + y}{1 + x + y + z} dxdydz.$$

4. За допомогою розкладу функції $f(x) = x, \quad x \in (0, 2\pi)$, в ряд Фур'є показати, що
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$
Використавши отриману рівність довести, що нескінченна сума
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots, \quad x \in (0, \pi),$$
не залежить від x.

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:
$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$
Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу
$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2019} a_i a_j,$$
де $a_1, \ldots, a_{2019} \in [-1, 1]$.